

ASPECTE PRIVIND STUDIUL MIȘCĂRII BIDIMENSIONALE CU AJUTORUL FUNCȚIEI MODUL

Autor: Alexandru TOFAN ¹
tofualess@gmail.com

Coordonatori: Șef lucr.dr. ing **Răzvan Bogdan ITU** ², Lector univ. dr. **Mihaela TOMESCU** ³

¹ *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Ingineria traficului și transporturilor, anul I*

² *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E*

³ *Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științe*

Rezumat

Dacă mișcarea punctului (sau corpului) este în cele două dimensiuni, atunci se spune că este mișcare bidimensională. În lucrare se prezintă aspecte privind studiul mișcării bidimensionale cu ajutorul funcției modul, și care presupune familiaritatea cu cinematica unidimensională, deoarece extinde aceleași concepte într-un spațiu bidimensional.

Cuvinte cheie

Mișcare bidimensională, funcție modul

1. Introducere

Pentru a oferi o descriere completă a cinematicii, trebuie să explorăm mișcarea în două și trei dimensiuni. La urma urmei, majoritatea obiectelor din universul nostru nu se mișcă în linii drepte; mai degrabă ele urmează traiectorii curbe (curbălinii). Mișcarea într-o dimensiune ne-a oferit o bază pe care să construim, deoarece conceptele de poziție, deplasare, viteză și accelerație definite într-o dimensiune pot fi extinse la două și trei dimensiuni. Deplasarea și viteza în două sau trei dimensiuni sunt extensii directe ale definițiilor unidimensionale.

În lucrare cu ajutorul funcției modul se pot studia și mișcările bidimensionale ale unui punct, în planul xOy .

2. Funcția modul

O funcție este o relație care asociază fiecărui element dintr-o mulțime (domeniul) un singur element dintr-o altă (posibil din aceeași) mulțime (codomeniul). Noțiunea de funcție este fundamentală în aproape toate ramurile matematicii și în toate științele exacte.

În matematică, modulul sau valoarea absolută a unui număr real x , notat $|x|$, este numărul real luat fără semn (astfel, de exemplu, 3 este valoarea absolută a numerelor 3 și -3). În mulțimea numerelor complexe, modulul unui număr este distanța dintre acesta și origine (numărul complex 0).

O definiție mai riguroasă a modulului unui număr real poate fi scrisă sub forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Generalizări ale modulului sunt folosite în multe contexte matematice diferite. Există modul definit pentru grupuri, numere complexe, spații vectoriale. Noțiunea de modul este strâns legată de cele de magnitudine, distanță sau normă în diferite contexte matematice sau fizice.

Jean Robert Argand a introdus termenul de modul de unitate de măsură, în Franța în 1806 special pentru complex valoare absolută și a fost împrumutat în engleză în 1866, echivalent în Latină „modulus”.

Termenul de „valoare absolută” a fost utilizat în acest sens încă din 1806 în Franța și din 1857 în Anglia. Notația a fost introdusă de către Karl Weierstrass în 1841.

Pentru orice număr real a , valoarea absolută sau modulul lui a este notat $|a|$ și este definit astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \quad (2)$$

După cum se poate vedea în definiție, valoarea absolută a lui a este întotdeauna un număr pozitiv sau zero, dar niciodată negativ.

Din punctul de vedere al geometriei analitice, valoarea absolută a unui număr real este distanța față de originea axei reale și, mai general, valoarea absolută a diferenței a două numere reale este distanța între ele.

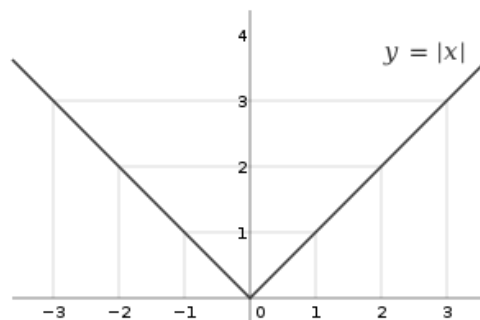


Fig. 1. Graficul funcției modul

Un spațiu bidimensional, spațiu cu două dimensiuni sau 2-spațiu este un spațiu geometric în care sunt necesare două valori (numite coordonate) pentru a determina poziția unui punct). Acesta este sensul informal al termenului dimensiune. Mulțimea \mathbb{R}^2 de perechi de numere reale cu structură adecvată servește adesea ca exemplu canonic al unui spațiu euclidian bidimensional.

Spațiul bidimensional poate fi considerat drept o proiecție a universului fizic pe un plan. De obicei, este văzut ca un spațiu euclidian, iar cele două dimensiuni se numesc lungime și lățime.

Mai târziu, planul a fost descris într-un așa-numit sistem de coordonate cartezian, un sistem de coordonate care specifică fiecare punct dintr-un plan în mod unic, printr-o pereche de coordonate numerice, care sunt distanțele cu semn de la punct la două drepte perpendiculare fixe, măsurate cu aceeași unitate de lungime. Fiecare dreaptă de referință este numită axă de coordonate sau doar axă a sistemului, iar punctul în care se întâlnesc este originea, de obicei la perechea ordonată $(0, 0)$. Coordonatele pot fi definite și ca pozițiile proiecțiilor perpendiculare ale punctului pe cele două axe, exprimate ca distanțe cu semn până la origine.

Ideea acestui sistem a fost dezvoltată în 1637 în scrierile lui Descartes și, independent de el, de Pierre de Fermat, deși Fermat a lucrat și în trei dimensiuni și nu a publicat descoperirea. Ambii autori au folosit o singură axă în tratările lor și au o lungime variabilă măsurată în raport cu această axă. Conceptul de utilizare a unei perechi de axe a fost introdus mai târziu, după ce La Géométrie de Descartes a fost tradusă în latină în 1649 de Frans van Schooten și studenții săi. Acești comentatori au introdus mai multe concepte care încercau să clarifice ideile conținute în lucrarea lui Descartes.

3. Exemple de utilizare a funcției modul în mișcarea bidimensională

Exemplele tratate în continuare arată cum se poate face acest studiu.

Exemplul 3.1

Se consideră coordonatele unui punct mobil în planul xOy :

$$x = \cos \omega t |\cos \omega t|, \quad y = \sin \omega t, \quad (1)$$

Se cere să se determine traiectoria punctului și să se descrie mișcarea sa pe traiectorie pentru t variind de la $-\infty$ la $+\infty$.

Rezolvare

Se elimină parametrul t între coordonatele punctului mobil:

- pentru $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}$ avem $\cos \omega t \in [1, 0]$, deci $\cos \omega t \geq 0$ și $|\cos \omega t| = \cos \omega t$.

Rezultă:

$$x = \cos^2 \omega t, \quad y = \sin \omega t, \quad (2)$$

Curba descrisă de punct este parabola:

$$y^2 + x = 1, \quad (3)$$

- pentru $\frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$, $\cos \omega t \in [0, -1]$ deci $\cos \omega t \leq 0$ și

$$|\cos \omega t| = -\cos \omega t.$$

Rezultă:

$$x = -\cos^2 \omega t, \quad y = \sin \omega t, \quad (4)$$

Curba descrisă de punct este parabola:

$$y^2 - x = 1, \quad (5)$$

Rezultă la fel:

- pentru $t \in \left[\frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}\right]$, $y^2 - x = 1$,

- pentru $t \in \left[\frac{3\pi}{2\omega}, 2\frac{\pi}{\omega}\right]$, $y^2 + x = 1$.

Punctul descrie o mișcare pe o curbă închisă alcătuită din două arce de parabolă și anume $A - B - C - D - A$, fiecare fiind parcurs într-o semiperioadă în sensul arătat pe figura 2.

Exemplul 3.2

Se consideră coordonatele unui punct mobil în planul xOy :

$$x = \frac{1}{t-1}, \quad y = \frac{|t|}{t-1}, \quad (1)$$

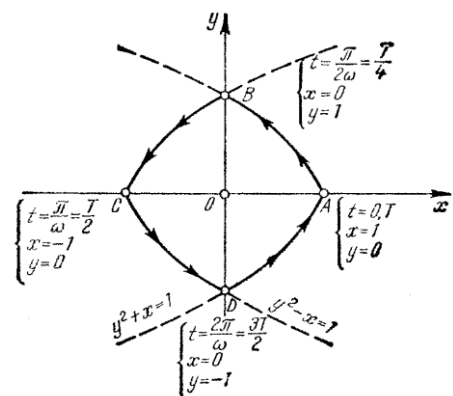


Fig. 2. Diagrama pentru exemplul 3.1

Se cere să se determine traiectoria punctului și să se descrie mișcarea sa pe traiectorie pentru t variind de la $-\infty$ la $+\infty$.

Rezolvare

Se elimină parametrul t între coordonatele punctului mobil; rezultă:

- pentru $t \geq 0$, $|t| = t$ și deci:

$$x = \frac{1}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t-1}, \quad (2)$$

Curba descrisă este dreapta:

$$y - x = 1, \quad (3)$$

- pentru $t \leq 0$, $|t| = -t$ și deci:

$$x = \frac{1}{t-1}, \quad y = \frac{-t}{t-1}, \quad (4)$$

Curba descrisă este dreapta:

$$x + y = -1, \quad (5)$$

Traectoria și descrierea mișcării:

La $t = -\infty$ din (2) rezultă:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t-1} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-t}{t-1} = -1, \quad (6)$$

Mobilul pleacă deci la $t = -\infty$ din $A(0, -1)$ și merge către $B(-1, 0)$ unde ajunge la $t = 0$. Aceasta rezultă atât din (1) cât și din (2):

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad (7)$$

Deplasarea de la A către B s-a făcut pe dreapta:

$$x + y = -1, \quad (8)$$

Din B el se îndreaptă către $C(-\infty; -\infty)$ pe dreapta $y - x = 1$ unde ajunge la ora $t = 1 - \varepsilon$.

Într-adevăr, înlocuind în (1) $t = 1 - \varepsilon$ și luând limita pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ rezultă:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-\varepsilon-1} = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = -\infty \\ y &= \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon-1} = \frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} + 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y = -\infty \end{aligned} \quad (9)$$

Din punctul C el sare în $D(+\infty; +\infty)$ pe aceeași dreaptă unde ajunge la ora $t = 1 + \varepsilon$.

Într-adevăr, înlocuind în (1) $t = 1 + \varepsilon$ și luând limita pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ avem

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+\varepsilon-1} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = +\infty \\ y &= \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y = +\infty \end{aligned} \quad (10)$$

Din D punctul parcurge dreapta $y - x = 1$ îndreptându-se către punctul $E(0, 1)$ unde ajunge la ora $t = +\infty$.

Într-adevăr, din (1) avem:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t-1}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x = 0 \\ y &= \frac{t}{t-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{t}}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Mobilul parcurge traiectoria în ordinea $ABCDE$ (fig. 3).

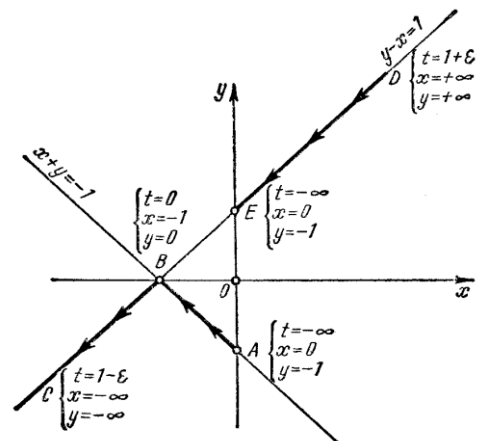


Fig. 3. Diagrama pentru exemplul 3.2

Exemplul 3.3

Se cere să se studieze mișcarea punctului M ale cărui coordonate sunt date de relațiile:

$$x = ||t| - 1|; \quad y = ||t| - 2|, \quad (1)$$

pentru $t \in (-\infty, +\infty)$

Rezolvare

Întocmim tabela 3.1. de variație a coordonatelor în ordine crescătoare a valorilor timpului, după care eliminăm parametrul t între coordonatele punctului mobil. Mersul mobilului este indicat în fig. 3.4 prin $1, \dots, 13$.

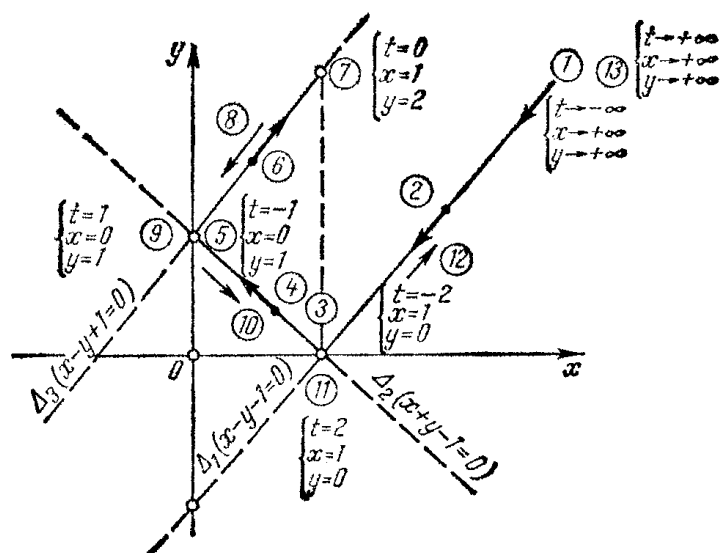


Fig. 4. Diagrama pentru exemplul 3.2

Tabelul 3.1. Mișcarea punctului $M(x,y)$

Nr.	t	x	y	Traietorie sau punct
1	$-\infty$	$+\infty$		1
2	$(-\infty, -2)$	$ t+1 = -(t+1)$	$ t+2 = -(t+2)$	$x-y-1=0$ (Δ_1)
3	-2	+1	0	3
4	$(-2, -1)$	$-t-1$	$t+2$	$x+y-1=0$ (Δ_2)
5	-1	0	1	5
6	$(-1, 0)$	$t+1$	$t+2$	$x-y+1=0$ (Δ_3)
7	0	1	2	7
8	$(0, +1)$	$t+1$	$t+2$	$x-y+1=0$
9	+1	0	1	$9 \equiv 5$
10	$(+1, +2)$	$t-1$	$-t+2$	$x+y-1=0$
11	+2	+1	0	$11 \equiv 3$
12	$(+2, +\infty)$	$t-1$	$t-2$	$x-y-1=0$
13	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	13

Concluzii

Prin exemplele rezolvate, prezentate în lucrare, s-a abordat problematica tipurilor de probleme întâlnite în mecanică care folosesc în rezolvare pe lângă metodele mecanicii și o serie de mărimi și operații matematice corespunzătoare cunoștințelor dobândite la această disciplină.

Este evident, că nu trebuie neglijat faptul că pe primul plan se află fenomenul mecanic, instrumentul matematic constituind numai un auxiliar subordonat aspectului mecanic, chiar dacă manevrarea acestui instrument este mai dificilă datorită nivelului său.

Din parcurgerea acestor exemple rezultă în foarte multe cazuri că transpunerea fenomenului mecanic este cu mult ușurată de un instrument matematic adecvat, iar rezolvarea unor probleme se simplifică foarte mult.

Prin exemplele tratate am încercat a demonstra a numai câtorva din posibilitățile matematice la care se poate face apel în vederea rezolvării unor probleme, fără pretenția de a fi epuizat toate aceste posibilități, menținându-se bineînțeles în limitele cunoștințelor matematice dobândite.

Bibliografie

- [1] Atanasiu, M., Drobotă, V., Fizică pentru admitere în facultate - Tehnica rezolvării problemelor, Volumul II, Editura Albatros, București, 1974
- [2] https://ro.wikipedia.org/wiki/Spa%C8%9Biu_bidimensional
- [3] <https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie>
- [4] <https://ro.wikipedia.org/wiki/Modul>